 ECOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS 1977

OPTION M'

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (4h)

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels.

a et b sont deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que l'on ait $a < b$. E désigne l'espace vectoriel des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, F_p désigne le sous-espace vectoriel de E constitué par les fonctions polynômes de degré $\leqslant p$. On emploiera éventuellement le mot "polynôme" dans le sens de "fonction polynôme".

Les parties III et IV sont indépendantes l'une de l'autre. Il est rappelé que, dans un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut extraire une suite convergente de toute suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $(\| a_n \|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée.

I

I - 1°/ A tout élément g de E on associe le nombre

$$\| g \| = \sup_{x \in [a,b]} | g(x) | .$$

Vérifier que l'on définit ainsi une norme sur E.

Dans tout le problème, E sera muni de cette norme.

I - 2°/ Soient p un élément de $\mathbb{N}$ et f un élément de E. On pose

$$d = \inf_{g \in F_p} \| g - f \| .$$

Montrer qu'il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F_p, convergeant vers un élément de F_p et telle que la suite $(\| g_n - f \|)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers d.

En déduire qu'il existe un élément P de F_p tel que l'on ait

$$\| P - f \| = d .$$

On dira que P est un *polynôme de meilleure approximation de f dans* F_p.

.../...

II

Dans cette partie, on se propose de montrer qu'il n'existe qu'un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p et d'en donner une caractérisation.

II - 1°/ Dans quel cas a-t-on $d = 0$? Montrer que, dans ce cas, il n'existe qu'un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p et indiquer quel est ce polynôme.

II - 2°/ Dans toute la suite de cette partie, on suppose $d \neq 0$ et l'on désigne par P un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p.

On pose

$$\alpha = \sup_{x \in [a,b]} [P(x) - f(x)] , \qquad \beta = \inf_{x \in [a,b]} [P(x) - f(x)] .$$

On désigne par A_1 l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que l'on ait $P(x) - f(x) = d$ et par A_{-1} l'ensemble des éléments x de $[a,b]$ tels que l'on ait $P(x) - f(x) = -d$.

Montrer que l'on a $\alpha = d$ (pour cela, on pourra, en considérant le polynôme $P + \frac{d - \alpha}{2}$, montrer que l'on aboutit à une contradiction si l'on suppose $\alpha \neq d$). Montrer aussi que l'on a $\beta = -d$.

Montrer que A_1 et A_{-1} ne sont pas vides.

II - 3°/ Montrer qu'il existe une suite finie $(x_0, \ldots, x_m)$ d'éléments de $[a,b]$, strictement croissante, telle que l'on ait $x_0 = a$ et $x_m = b$ et que, quels que soient $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ et $y \in [x_{i-1}, x_i]$, on ait

$$|[P(x) - f(x)] - [P(y) - f(y)]| \leqslant \frac{d}{2} .$$

II - 4°/ On choisit une suite $(x_0, \ldots, x_m)$ satisfaisant aux conditions précédentes.

Montrer que, quels que soient les éléments i et j de $\{1, \ldots, m\}$ tels que $[x_{i-1}, x_i] \cap A_1$ et $[x_{j-1}, x_j] \cap A_{-1}$ ne soient pas vides, j est différent de i, de $i+1$ et de $i-1$.

Dans la suite, pour $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, on désigne par $\mathcal{J}_\varepsilon$ l'ensemble des intervalles de la forme $[x_{i-1}, x_i]$ (i étant un élément de $\{1, \ldots, m\}$) dont l'intersection avec A_ε n'est pas vide et par I l'ensemble des éléments i tels que $[x_{i-1}, x_i]$ appartienne à $\mathcal{J}_1 \cup \mathcal{J}_{-1}$.

Montrer que le nombre r d'éléments de I est au moins égal à 2 et que l'on a $m \geqslant 3$.

II - 5°/ On pose

$$I = \{i_1, \ldots, i_r\} ,$$

.../...

la suite $(i_1, \dots, i_r)$ étant strictement croissante, et, pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$, $B_j = [x_{i_j - 1}, x_{i_j}]$.

Montrer qu'il existe une suite $((j_1, \varepsilon_1), \dots, (j_q, \varepsilon_q))$ d'éléments de $\{1, \dots, r\} \times \{-1, +1\}$ et une seule, satisfaisant aux conditions suivantes :

a) la suite $(j_1, \dots, j_q)$ est strictement croissante et l'on a $j_q = r$;

b) si l'on pose $j_0 = 0$, alors, quels que soient les entiers k et j tels que l'on ait $1 \leqslant k \leqslant q$ et $j_{k-1} < j \leqslant j_k$, B_j appartient à $\mathcal{J}_{\varepsilon_k}$;

c) quel que soit l'entier k tel que l'on ait $k \geqslant 1$ et $k \leqslant q - 1$, ε_k et ε_{k+1} sont de signe contraire.

Montrer que l'on a $q \geqslant 2$.

II - 6°/ Pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, on pose

$$C_k = \bigcup_{j_{k-1} < j \leqslant j_k} B_j .$$

Montrer que, quel que soit $k \in \{1, \dots, q - 1\}$, il existe $u \in [a,b]$ tel que, quels que soient $x \in C_k$ et $y \in C_{k+1}$, on ait $x < u < y$.

II - 7°/ On choisit, pour tout $k \in \{1, \dots, q - 1\}$, un élément u satisfaisant à la condition précédente et on le note u_k. On désigne par Q la fonction polynôme

$$x \mapsto (x - u_1) \dots (x - u_{q-1}) .$$

Montrer que $(P - f)Q$ ne s'annule pas sur $C_1 \cup \dots \cup C_q$ et garde un signe constant sur cet ensemble.

II - 8°/ Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que l'on ait $\| P + \lambda Q - f \| < d$. Que peut-on en déduire sur q ?

Montrer qu'il existe une suite $(y_1, \dots, y_{p+2})$ d'éléments de $[a, b]$, strictement croissante, et un élément η de $\{-1, +1\}$ tels que, quel que soit $i \in \{1, \dots, p + 2\}$, y_i appartienne à $A_{(-1)^i \eta}$

II - 9°/ Soit P_1 un polynôme de meilleure approximation de f dans F_p. Montrer que $\frac{1}{2}(P + P_1)$ en est un aussi et que, quel que soit $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, l'ensemble des éléments x de $[a, b]$ tels que l'on ait $\frac{1}{2}[P(x) + P_1(x)] - f(x) \quad \varepsilon d$ est contenu dans A_ε.

Montrer alors que l'on a $P_1 = P$.

.../...

II - 10°/ Soit R un élément de F_p . On suppose qu'il existe une suite $(z_1, \ldots, z_{p+2})$ d'éléments de [a , b] , strictement croissante, et un élément ζ de $\{-1, +1\}$ tels que, quel que soit $i \in \{1, \ldots, p+2\}$, on ait $R(z_i) - f(z_i) = (-1)^i \zeta \| R - f \|$.

Montrer que l'on a R P .

III

III - 1°/ Pour tout élément f de E , expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_0 .

III - 2°/ Dans cette question, on prend pour f l'application $x \mapsto e^x$ de [a , b] dans $\mathbb{R}$.

Expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_1 .

III - 3°/ Dans cette question, on se place dans le cas $a = -b$ (b étant > 0) et f est définie par

$$f(x) = x^2 + x \qquad \text{pour} \quad -b \leqslant x \leqslant 0 \ ,$$

$$f(x) = x^2 - x \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant b \ .$$

Expliciter le polynôme de meilleure approximation de f dans F_2 .

IV

Dans cette partie, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on désigne par G_p l'ensemble des éléments de F_{p+1} dont le coefficient du terme de degré $p+1$ est égal à 1 .

IV - 1°/ Montrer que, quel que soit $p \in \mathbb{N}$, il existe un élément S_p de G_p et un seul tel que l'on ait

$$\| S_p \| = \inf_{g \in G_p} \| g \| \ .$$

IV - 2°/ Dans cette question, on se place dans le cas $a = -1$ et $b = +1$. On désigne par T_p l'application $x \mapsto \cos [(p+1) \operatorname{Arc\,cos} x]$ de $[-1, +1]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que T_p est un élément de F_{p+1} et que l'on a $S_p = 2^{-p} T_p$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail